TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Maschinenwesen
Festkörpermechanik
Getriebelehre

Lagrangesche Multiplikatormethode
für Gleichheitsnebenbedingungen

Die Ermittlung der Extrema einer n-dimensionalen Funktion F(X) unter endlich vielen Restriktionen $h_j(X)$, j = 1, … , m, in Gleichheitsform mit der Annahme n > m stellt eine klassische Aufgabenstellung der Optimierung dar. Die sich ergebende Lagrange-Funktion lautet:

$$\boxed{L(X,\lambda) = F(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(X)} \qquad (1)$$

Es wurde nachgewiesen, dass die Lagrangesche Multiplikatormethode für die Extremalpunkte X^* eine notwendige Bedingung ist. Damit ist X^* unter Einbeziehung der genannten Restriktionen eine Lösung des Gleichungssystems

$$F'(X) + Lh'(X) = 0 \quad \text{und} \quad h(X) = 0. \qquad (2)$$

Mit den Komponentendarstellungen

$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ n: Anzahl der Variablen

$h = [h_1, h_2, \ldots, h_m]^T$ m: Anzahl der Restriktionen

$L = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]^T$

erhalten die Gln. (2) die Form:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial h_j(X)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n$$

und (3)

$$h_j(X) = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, m.$$

Damit liegen n+m reelle Gleichungen für die n+m reellen Unbekannten x_1, x_2, … , x_n ; λ_1, λ_2, … , λ_m vor, deren Lösbarkeit zu bestimmen ist.
Die mitunter schwierige Aufgabe besteht nun darin, aus den in der Lösungsgesamtheit vorhandenen Punkte $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ alle Extremalpunkte X^* mit den Nebenbedingungen h(X) = 0 zu finden. In der Regel ist nicht jeder Lösungspunkt ein Extremalpunkt. Eine zweckmäßige Möglichkeit der Ermittlung dieser „wahren" Extremalpunkte besteht in der Eliminierung von Nebenbedingungen.

In der Literatur wird als Demonstrationsbeispiel zu einem 2-dimensionalen Fall der Lagrangeschen Multiplikatormethode die folgende Aufgabe betrachtet:

Gesucht sind die Extremalstellen der restringierten Zielfunktion

$$\left.\begin{aligned} F(X) &= x_1^2 + x_2^2 + 3 \\ h(X) &= x_1^2 + x_2 - 2 = 0 \quad \text{mit } x_1, x_2 \in R. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ist also X^* eine Extremalstelle von F(X) unter der Nebenbedingung h(X) = 0, n > m, so gilt nach (3):

$$\boxed{\operatorname{grad} F(X^*) + \lambda \operatorname{grad} h(X^*) = 0} \tag{5}$$

mit einer reellen Zahl λ.

$$\left.\begin{aligned} \text{Lösung: Mit } \operatorname{grad} F(X) &= [2x_1, 2x_2]^T \\ \operatorname{grad} h(X) &= [2x_1, 1]^T \end{aligned}\right. \tag{6}$$

ergibt (5) mit h(X) = 0 das nichtlineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2\lambda x_1 &= 0 \\ 2x_2 + \lambda &= 0 \\ x_1^2 + x_2 - 2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

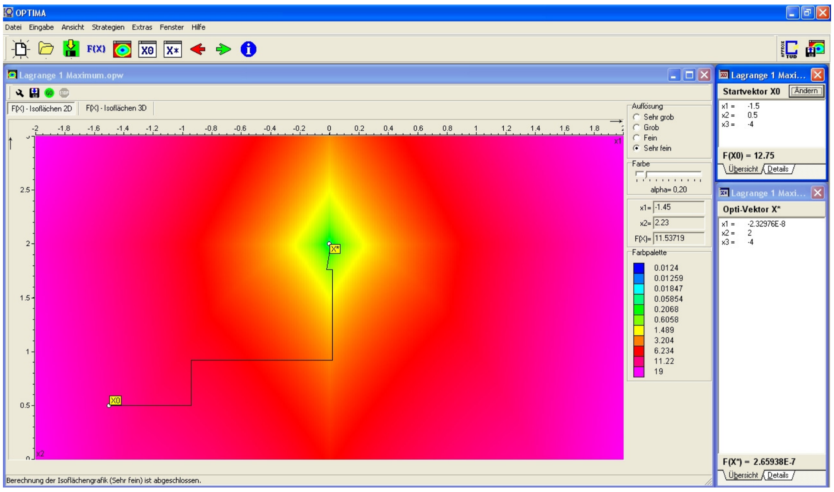
Die Koordinaten der Extremstellen ergeben sich aus (7):

$$X_1^* = [0;\, 2]^T \qquad \text{mit} \quad F(X_1^*) = 7 \quad \text{und} \quad \lambda = -4$$

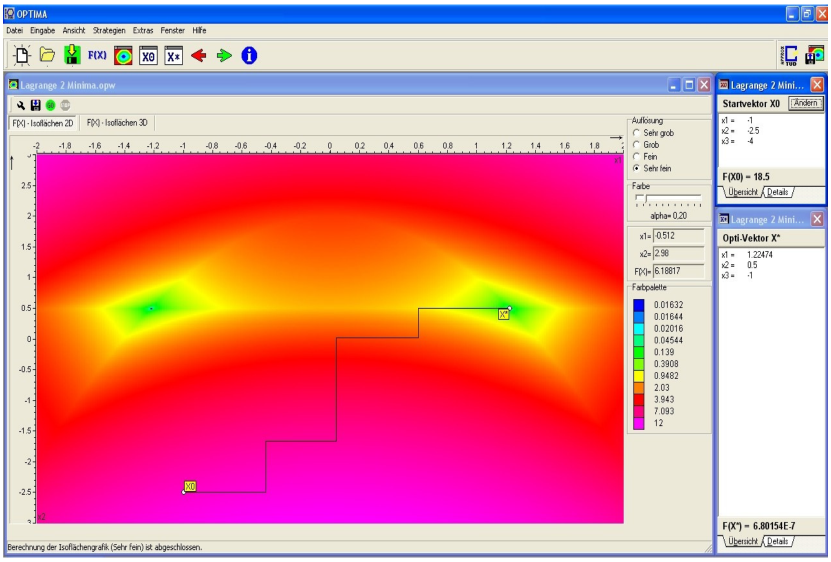
$$\left.\begin{array}{lll} X_2^* = \left[\sqrt{6}/2;\, 0{,}5\right]^T & \text{mit} & F(X_2^*) = 4{,}75 \\ X_3^* = \left[-\sqrt{6}/2;\, 0{,}5\right]^T & \text{mit} & F(X_3^*) = 4{,}75 \end{array}\right\} \lambda = -1$$

Die Isoflächen-Darstellungen zeigen, dass X_1^* ein Maximum ist und X_2^*, X_3^* Minimalstellen sind.

2D-Isoflächen/ Maximum



2D-Isoflächen/ Minima



Ergebnisse mit APPROX für Windows:

$$x_1^* = 0\;,\;\; x_2^* = 2\;,\;\; \lambda = x_3 = -4 \qquad \text{Maximum}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^* = 1{,}22474\;,\;\; x_2^* = 0{,}5\;,\;\; \lambda = -1 \\ x_1^* = -1{,}22474\;,\;\; x_2^* = 0{,}5\;,\;\; \lambda = -1 \end{array}\right\} \text{Minima}$$